第 3 講　複素数と 2 次方程式

PART1 複素数とその計算

要点① 数の範囲の拡張と虚数単位

2 次方程式 $x^2=3$ は，有理数の範囲では解をもたない。しかし，その範囲を実数まで広げると，$x=\pm\sqrt{3}$ という無理数の解をもつ。

x が実数のとき，$x^2\geqq 0$ である。よって，2 次方程式 $x^2=-3$ は，実数の範囲では解をもたないことがわかる。

ここでは，2 次方程式が常に解をもつように，数の範囲を拡張する。

2 乗すると -1 になる新しい数を考え，その数を文字「　」で表す。

つまり

$$i^2=-1$$

とする。この i を「虚数（きょすう）単位」という。これを定義することで，負の数の平方根，すなわち，「2 乗すると負の数」になる数を扱うことができるようになる。

要点② 複素数，複素数の相等

「　　　」… a，b を実数として，　　　　の形で表される数

複素数 $a+bi$ において，a を「　　」，b を「　　」という。

例　$3-4i$ の実部は　，虚部は

複素数 $a+bi$ において，$b=0$，すなわち虚部が 0 のとき，$a+0i=a$ は実数を表す。

$b\neq 0$ のとき，複素数 $a+bi$ を「　　」という。

特に，$a=0$，$b\neq 0$ のとき，複素数 $0+bi=bi$ を「　　　」という。

〈複素数 $a+bi$〉

$b=0$	$b\neq 0$
実数　a	虚数　$a+bi$ 純虚数　bi

2つの複素数が等しいのは，「実部と虚部が共に等しいとき」と定める。

複素数の相等

a，b，c，d を実数とする。

$a+bi=c+di \iff a=c$ かつ $b=d$

特に $a+bi=0 \iff a=0$ かつ $b=0$

例 $x+yi=-2+3i$ を満たす実数 x，y は $x=$ ，$y=$

※虚数を扱うときは，数の大小関係や正負は考えない。

要点③ 複素数の計算

複素数の加法，減法は，虚数単位 i を文字のように扱い，実部，虚部それぞれについて和，差を求める。

例 $(1+2i)+(3-4i)=$ $+$ $=$

$(1+2i)-(3-4i)=$ $+$ $=$

複素数の乗法は，虚数単位 i を文字のように扱って計算するが， が出てきたときには，それを におき換える。

例 $(1+2i)(3-4i)=1\cdot3+1\cdot(-4)i+2\cdot3i+2\cdot(-4)i^2$

$=3-4i+6i+(-8)$ $=$

2つの複素数 $a+bi$ と $a-bi$ を，互いに「　　　　」という。

互いに共役な複素数 $a+bi$ と $a-bi$ の和と積は

$(a+bi)+(a-bi)=$

$(a+bi)(a-bi)=$ $=$

となり，ともに実数である。

複素数の除法は，分母と共役な複素数を分母と分子に掛けることで，分母を実数にする。

例 $\dfrac{3-4i}{1+2i}=\dfrac{(3-4i)}{(1+2i)}=\dfrac{3-6i-4i+8i^2}{1-4i^2}=\dfrac{\quad}{\quad}=-\dfrac{5}{5}-\dfrac{10}{5}i=-1-2i$

※実数 a と共役な複素数は，a である。

1 (1) 次の計算をせよ。

(i) $(3+2i)-(2-4i)$ (ii) i^3+i^2+i+1 (iii) $(2-i)(3+5i)$

(2) 次の式を計算せよ。

(i) $\dfrac{4}{2+3i}$ (ii) $\dfrac{2i}{1-i}$

Point Pickup

複素数の加法，減法，乗法

虚数単位 i を文字のように扱い，また $i^2=-1$ であることを用いて計算する。

計算結果は $a+bi$ (a，b は実数)の形にする。

複素数の除法

分母と共役な複素数を分母と分子に掛け，分母を実数にする。

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$$

第 3 講　PART1 確認問題

次の計算をせよ。

1 $(4+3i)-(2+5i)=\boxed{\text{ア}}-\boxed{\text{イ}}i$

2 $1+i-i^2+i^3=\boxed{\text{ウ}}$

3 $(3-i)(4+3i)=\boxed{\text{エオ}}+\boxed{\text{カ}}i$

次の式を計算せよ。

4 $\dfrac{5}{1+2i}=\boxed{\text{キ}}-\boxed{\text{ク}}i$

5 $\dfrac{2i}{3-i}=-\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}+\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}i$

第3講　複素数と2次方程式

PART1　複素数とその計算

1 (1)　次の計算をせよ。

(i)　$(3+2i)-(2-4i)$　(ii)　i^3+i^2+i+1　(iii)　$(2-i)(3+5i)$

(2)　次の式を計算せよ。

(i)　$\dfrac{4}{2+3i}$　(ii)　$\dfrac{2i}{1-i}$

[解答]

(1) (i)　$(3+2i)-(2-4i)=(3-2)+(2+4)i=1+6i$

(ii)　$i^3+i^2+i+1=i^2\cdot i+i^2+i+1=-i-1+i+1=0$

(iii)　$(2-i)(3+5i)=6+10i-3i-5i^2=6+10i-3i+5=11+7i$

(2) (i)　$\dfrac{4}{2+3i}=\dfrac{4(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\dfrac{4(2-3i)}{4-9i^2}=\dfrac{8-12i}{13}=\dfrac{8}{13}-\dfrac{12}{13}i$

(ii)　$\dfrac{2i}{1-i}=\dfrac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i(1+i)}{1-i^2}=\dfrac{2i(1+i)}{2}=i(1+i)=i+i^2=-1+i$

第 3 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：2

[解説]

$$(4+3i)-(2+5i)=(4-2)+(3-5)i \quad \text{[A]}$$
$$=\mathbf{2-2i}$$

[A]　実部，虚部それぞれについて和や差を求める。

2

[正解] ウ：2

[解説]

$$1+i-i^2+i^3=1+i-i^2+i^2\cdot i \quad \text{[B]}$$
$$=1+i+1-i$$
$$=\mathbf{2}$$

[B]　$i^2=-1$

3

[正解] エオ：15，カ：5

[解説]

$$(3-i)(4+3i)=12+9i-4i-3i^2 \quad \text{[C] [D]}$$
$$=12+9i-4i+3$$
$$=\mathbf{15+5i}$$

[C]　虚数単位 i を文字のように扱って計算する。

[D]　$i^2=-1$

4

[正解] キ：1，ク：2

[解説]

$$\frac{5}{1+2i}=\frac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} \quad \text{[E]}$$
$$=\frac{5(1-2i)}{1-4i^2} \quad \text{[F]}$$
$$=\frac{5(1-2i)}{5}$$
$$=\mathbf{1-2i}$$

[E]　分母と共役な複素数を分母と分子に掛け，分母を実数にする。
$$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2$$
$$=a^2+b^2$$

[F]　$i^2=-1$

5 **[正解]** ケ：1，コ：5，サ：3，シ：5

[解説]

$$\frac{2i}{3-i}=\frac{2i(3+i)}{(3-i)(3+i)}$$ [G]

$$=\frac{2i(3+i)}{9-i^2}$$ [H]

$$=\frac{2i(3+i)}{10}$$

$$=\frac{i(3+i)}{5}$$

$$=\frac{3i+i^2}{5}$$ [H]

$$=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$$

［G］　分母と共役な複素数を分母と分子に掛け，分母を実数にする。

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2$$
$$=a^2+b^2$$

［H］　$i^2=-1$